Integrali con i residui

di Nicola Arcozzi
Università di Bologna

1 Preliminari

Ricordiamo alcune definizioni e alcuni risultati che ci saranno utili.

Definizione 1. *Sia $f: A\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ olomorfa in $A\subseteq\mathbb{C}$ aperto e supponiamo che per qualche $m\geqslant 0$ si abbia che:*

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

*per $0<|z-z_0|<R$. Il **residuo** di f in z_0 è a_{-1}. (Se $m\geqslant 0$, possiamo supporre che $a_{-1}=0$). Si utilizza il simbolo:*

$$a_{-1}=\mathrm{Res}(f(z),z=z_0)=\mathrm{Res}(f,z_0).$$

Per calcolare il residuo abbiamo diverse maniere. La prima consiste nello sviluppare f is serie di potenze (sino a delle potenza negativa) in un intorno di z_0 e di considerarne il coefficiente a_{-1}.

La seconda consiste nel calcolare:

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{d^{(m-1)}}{dz^m}[(z-z_0)^m f(z)],$$

che, nel frequente caso $m=1$, si riduce a

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Questa seconda maniera di calcolare il residuo è spesso comoda, poiché possiamo utilizzare il Teorema dell'Hospital.

La terza maniera per calcolare il residuo mette in gioco gli integrali curvilinei complessi. Sia γ una curva chiusa in $A\setminus\{z_0\}$ che gira in senso antiorario attorno al punto z_0 e che è deformabile in A a un punto. Allora,

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz.$$

Il Teorema dei Residui generalizza questa ultima formula ed è lo strumento che ci permette di calcolare molti integrali definiti, generalizzati o meno.

Teorema 2. *Sia $f: A\setminus\{z_1,\ldots,z_l\}\to\mathbb{C}$ olomorfa, con $A\subseteq\mathbb{C}$ aperto e sia γ una curva chiusa in $A\setminus\{z_1,\ldots,z_l\}$, orientata in senso antiorario, che circonda $\{z_1,\ldots,z_l\}$ e che è deformabile in A a un punto. Allora,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz=\mathrm{Res}(f,z_1)+\ldots+\mathrm{Res}(f,z_l).$$

2 Integrali trigonometrici.

Una classe di integrali che si calcolano utilizzando i residui consiste in quelli aventi la forma:

$$I=\int_0^{2\pi}R(\cos(t),\sin(t))dt,$$

dove $R(z)=\frac{P(z,w)}{Q(z,w)}$ è una funzione razionale (P, Q sono polinomi di due variabili z, w) il cui denominatore Q non si annulla per $(z,w)=(\cos(t),\sin(t))$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Per ridurre il calcolo di I a un calcolo di residui, ricordiamo che, se $z=e^{it}=\cos(t)+i\sin(t)$, allora

$$\begin{cases}\cos(t)=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{e^{it}+\frac{1}{e^{it}}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},\\ \sin(t)=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{e^{it}-\frac{1}{e^{it}}}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}.\end{cases}$$

Inoltre, al variare di t in $[0,2\pi]$, il punto $z=\gamma(t)=e^{it}$ descrive in senso antiorario la circonferenza γ di raggio 1 e centro 0 nel piano complesso e abbiamo:

$$dt=\frac{de^{it}}{ie^{it}}=\frac{dz}{iz}.$$

Quindi possiamo scrivere,

$$\int_0^{2\pi}R(\cos(t),\sin(t))dt=\int_\gamma R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Poniamo

$$f(z)=R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz},$$

che è a sua volta una funzione razionale, non avente singolarità sulla circonferenza $|z|=1$. Siano $z_1,\dots,z_l$ le sue singolarità in $|z|<1$. Per il Teorema dei Residui, quindi:

$$\int_0^{2\pi}R(\cos(t),\sin(t))dt=\int_\gamma R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}=2\pi i[\mathrm{Res}(f,z_1)+\dots+\mathrm{Res}(f,z_l)].$$

2.1 Un esempio

Consideriamo

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2+\cos(t)+\sin(t)}.$$

Invece di imparare a memoria le formule, possiamo imparare a memoria l'idea soggiacente. Posto $z=e^{it}$, quindi $\frac{dz}{iz}=dt$, abbiamo:

$$\begin{aligned}I &= \int_{\{z:|z|=1\}}\frac{1}{2+\frac{z+1/z}{2}+\frac{z-1/z}{2i}}\frac{dz}{iz}\\ &= \int_{\{z:|z|=1\}}\frac{2}{4iz+i(z^2+1)+(z^2-1)}dz\\ &= \int_{\{z:|z|=1\}}\frac{2}{(1+i)z^2+4iz+(i-1)}dz\\ &= \int_{\{z:|z|=1\}}f(z)dz\\ &= 2\pi i\sum_{z_j:|z_j|<1}\mathrm{Res}(f(z),z=z_j).\end{aligned}$$

Per trovare le singolarità $\{z_j\}$, risolviamo l'equazione di II grado:

$$0=(1+i)z^2+4iz+(i-1),$$

il cui discriminante è

$$\Delta/4=(2i)^2-(1+i)(i-1)=-4-(i^2-1)=-2=\left(i\sqrt{2}\right)^2;$$

quindi $z = \frac{-2i \pm i\sqrt{2}}{1+i} = i\frac{-2 \pm \sqrt{2}}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}(1+i) = \left(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+i)$. Poiché $|1+i| = \sqrt{2}$, la soluzione col segno + ha modulo $\sqrt{2} - 1 < 1$ (sta all'interno della circonferenza), mentre qualle col segno meno ha modulo $\sqrt{2} + 1 > 1$ (sta all'esterno della circonferenza). Quindi dobbiamo solo considerare

$$z_1 = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+i).$$

Chiaramente la singolarità di f in z_1 ha ordine 1, quindi:

$$\begin{aligned} I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, z_1) &= 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{2(z - z_1)}{(1+i)z^2 + 4iz + (i-1)} \\ &= 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{2}{2(1+i)z + 4i} \\ &= 2\pi i \frac{2}{2(1+i)(1+i)\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 4i} \\ &= 2\pi i \frac{2}{4i\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 4i} \\ &= \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

2.2 Esercizi

Calcolare i seguenti integrali.

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos^2(t) + 2\cos(t) + 2}$
2. $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sinn}(t)\, dt}{\sin^2(t) + 2\cos(t) + 2}$
3. (Facoltativo).$\int_{\{z : |z| = 1\}} \left| \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \right|^2 |dz|$. **Suggerimento.** Porre $z = e^{it}$, quindi $|dz| = |ie^{it}dt| = |dt|$. Osservare che $|w|^2 = ww^*$ e ricordare che se $z = e^{it}$, allora $z^* = e^{-it} = \frac{1}{z}$.

3 Integrali in senso generalizzato di funzioni razionali

Consideriamo ora integrali del tipo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

dove P, Q sono polinomi per cui grado$(Q) \geqslant$ grado$(P) + 2$ e con Q che non si annulla per x in $\mathbb{R}$. Queste conidizioni assicurano la convergenza (assoluta) dell'integrale. L'idea è di considerare $z = x$, cioè di vedere $\mathbb{R}$ come una curva in $\mathbb{C}$; il problema è che questa curva non è limitata.

Consideriamo allora, per ogni $R > 0$ grande abbastanza, $\sigma = \sigma_R$ la curva $\sigma = \gamma + \alpha + \delta + \beta$ che percorre in senso antiorario il perimetro di un rettangolo avente i vertici in $-R, R, R + iR, -r + iR$. Più precisamente (parametrizzando per comodità $-\delta$ e $-\beta$, le curve δ e β percorse in senso inverso):

- $\gamma(x) = x$ per $x \in [-R, R]$;
- $\alpha(y) = R + iy$ per $y \in [0, R]$;
- $-\delta(x) = x + iR$ per $x \in [-R, R]$;
- $-\beta(y) = -R + iy$ per $y \in [0, R]$.

Abbiamo allora che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \to \infty} \int_\gamma f(z) dz.$$

Mostreremo a breve che

$$(*) \quad 0 = \lim_{R \to \infty} \int_\alpha f(z) dz = \lim_{R \to \infty} \int_\delta f(z) dz = \lim_{R \to \infty} \int_\beta f(z) dz.$$

Siamo ora $z_1, \ldots, z_l$ gli zeri di Q nel semipiano superiore $\{z = x + iy \in \mathbb{C}: y > 0\}$. Se R è abbastanza grande, allora $z_1, \ldots, z_l$ sono al'interno del rettangolo avente perimetro σ. Possiamo allora applicare il Teorema dei Residui e ottenere:

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}(f, z_j) &= \lim_{R\to\infty} \int_\sigma f(z)dz \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_\alpha f(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_\delta f(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_\beta f(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + 0 + 0 + 0, \end{aligned}$$

cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Verifichiamo $(*)$. Osserviamo innanzitutto che:

$$\begin{aligned} |f(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(s)}\right| &= \frac{|a_0 + \ldots + a_n z^n|}{|b_0 + \ldots + b_m z^m|} \\ &\quad \text{con } m \geqslant n + 2 \text{ per ipotesi} \\ &= \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{|a_0/z^n + \ldots + a_n|}{|b_0/z^m + \ldots + b_m|} \\ &\sim \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{|a_n|}{|b_m|} \text{ per } |z| \to \infty. \end{aligned}$$

Poiché su α, β, δ abbiamo che $|z| \geqslant R$ e che tutti questi segmenti hanno lunghezza non superiore a $2R$, $(*)$ segue facilmente. Vediamo i dettagli per α:

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \left| \int_\alpha f(z)dz \right| &\leqslant \lim_{R\to\infty} \int_\alpha \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{|a_0/z^n + \ldots + a_n|}{|b_0/z^m + \ldots + b_m|} |dz| \\ &\leqslant \lim_{R\to\infty} R \cdot \frac{1}{R^{m-n}} \left(\frac{|a_n|}{|b_m|} + 1 \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{m-n-1}} \left(\frac{|a_n|}{|b_m|} + 1 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

I casi di β e δ si trattano allo stesso modo.

3.1 Un esempio

Consideriamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Possiamo calcolare $I = \pi$ calcolando una primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$, ma useremo i residui. Sia $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$: essa soddisfa i requisiti della procedura appena descritta, poiché il numeratore ha grado $n = 0$ e il denominatore ha grado $m = 2$.

L'equazione $z^2 + 1 = 0$ ha soluzioni (semplici) $z = \pm i$, delle quali solo $z = i$ giace nel semipiano superiore. Allora,

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z = i) \\ &= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{z - i}{z^2 + 1} \\ &= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{1}{2z} \\ &= \frac{2\pi i}{2i} = \pi. \end{aligned}$$

3.2 Esercizi

Calcolare i seguenti integrali.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+x^2+1}$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

4 Integrali che vengono dalle trasformate di Fourier.

Vedremo in seguito le trasformate di Fourier, ma ne anticipiamo qui la definizione.

Sia $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$ una funzione assolutamente integrabile su $(-\infty, +\infty)$. La sua trasformata di Fourier è la funzione $\hat{f}: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$ definita dall'espressione integrale:

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx.$$

4.1 Trasformata di Fourier di una funzione razionale.

Consideriamo integrali del tipo

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iux} dx, \; f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P, Q sono polinomi per cui grado$(Q) \geqslant$ grado$(P) + 1$ e con Q che non si annulla per x in $\mathbb{R}$. Queste conidizioni assicureranno la convergenza (semplice) dell'integrale per $u \neq 0$. L'idea è ancora quella di considerare $z = x$, cioè di vedere $\mathbb{R}$ come una curva in $\mathbb{C}$. A seconda del segno di y dovremo considerare il semipiano superiore o inferiore.

Scriviamo il risultato finale dei nostri conti formalmente, così che possa essere meglio utilizzato.

Teorema 3. *Siano P, Q, f come sopra e si consideri $g(z) = f(z) e^{iuz}$. Siano z_1, ..., z_l gli zeri di Q nel semipiano superiore $\{z = x + iy \colon y > 0\}$ e w_1, ..., w_m quelli nel semipiano inferiore $\{z = x + iy \colon y < 0\}$. Allora abbiamo che:*

i. Se $u > 0$, allora

$$\hat{f}(u) = 2\pi i [\mathrm{Res}(g, z_1) + \ldots + \mathrm{Res}(g, z_l)].$$

ii. Se $u < 0$, allora

$$\hat{f}(u) = -2\pi i [\mathrm{Res}(g, w_1) + \ldots + \mathrm{Res}(g, w_m)].$$

La ragione per cui consideriamo diversamente i segni di u è la seguente. Supponiamo che $u > 0$. Allora:

$$|e^{iuz}| = |e^{iu(x+iy)}| = |e^{iux}| \cdot |e^{i^2 uy}| = e^{-uy} \to 0 \text{ per } y \to +\infty.$$

Questo ci dice che l'integranda g è "piccola" nel semipiano superiore, se $u > 0$. Un ragionamento analogo vale per il semipiano inferiore se $u < 0$.

Per calcolare l'integrale, posto $u > 0$, utilizziamo il rettagolo visto in precedenza. Per ogni $R > 0$ grande abbastanza, sia $\sigma = \sigma_R$ la curva $\sigma = \gamma + \alpha + \delta + \beta$ che percorre in senso antiorario il perimetro di un rettangolo avente i vertici in $-R, R, R + iR, -r + iR$. Gli integrali su α, β, δ possono essere stimati come in precedenza, anzi, meglio (per questo ci basta grado$(Q) \geqslant$ grado$(P) + 1$).

Vediamo l'integrale su α (quello su β è analogo). Usando le stime precedenti,

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha f(z)e^{iuz}dz\right| &= \left|\int_0^R f(R+iy)e^{iu(R+iy)}i\,dy\right|\\ &\leqslant \int_0^R |f(R+iy)|e^{-uy}\,dy\\ &\leqslant \frac{C}{R^{m-n}}\int_0^R e^{-uy}\,dy,\\ &\quad \text{per le stime già viste nel caso delle funzioni razionali,}\\ &= \frac{C}{R^{m-n}}\frac{1-e^{-uR}}{u}\\ &\quad \text{calcolando l'integrale.}\end{aligned}$$

Ci basta $m \geqslant n$ per dedurre che

$$\lim_{R\to\infty}\int_\alpha f(z)e^{iuz}dz = 0.$$

Vediamo ora l'integrale su $-\delta$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\delta} f(z)e^{iuz}dz\right| &= \left|\int_{-R}^R f(x+iR)e^{iu(x+iR)}\,dx\right|\\ &\leqslant e^{-uR}\int_{-R}^R |f(x+iR)|dy\\ &\leqslant \frac{CRe^{-uR}}{R^{m-n}}\\ &\quad \text{per le stime già viste nel caso delle funzioni razionali,}\\ &\leqslant Ce^{-uR}\\ &\quad \text{perché} \quad m-n\geqslant 1.\end{aligned}$$

Facciamo ora tendere R a infinito.

Poiché i contributi sui lati α, β, δ tendono a zero, la somma dei residui ci dà, come visto sopra, anche il limite dell'integrale su γ. Ciò dimostra il teorema.

4.2 Alcuni esempi.

4.2.1 La funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, quindi:

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{1+x^2}dx.$$

Le ipotesi del teorema sono soddisfatte. Conosciamo le singolarità di f (gli zeri di $1+x^2$) da un precedente integrale. Quindi, se $u>0$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\hat{f}(u) &= \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iuz}}{1+z^2}, z=i\right)\\ &= \lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{iuz}}{1+z^2}\\ &= \lim_{z\to i}\frac{e^{iuz}+(z-i)iue^{iuz}}{2z}\\ &= \frac{e^{-u}}{2i},\end{aligned}$$

cioè,

$$\hat{f}(u) = \pi e^{-u}, \text{se}\, u>0.$$

Per $u<0$ consideriamo la singolarità $z=-i$, che sta nel semipiano inferiore, e otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\hat{f}(u) &= -\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iuz}}{1+z^2}, z=-i\right) \\
&= -\lim_{z\to -i}\frac{(z+i)e^{iuz}}{1+z^2} \\
&= -\lim_{z\to -i}\frac{e^{iuz}+(z+i)iue^{iuz}}{2z} \\
&= -\frac{e^u}{-2i}=\frac{e^u}{2i}.
\end{aligned}
$$

Quindi, in generale,

$$
\hat{f}(u)=\pi\begin{cases} e^{-u}\,\mathrm{se}\,u>0, \\ e^u=e^{-(-u)}\,\mathrm{se}\,u<0 \end{cases}=\pi e^{-|u|},
$$

che vale anche se $u=0$.

4.2.2 La funzione $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$.

L'equazione $z^2+z+1=0$ ha soluzioni $z_\pm=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, con z_+ nel semipiano superiore e z_- in quello inferiore. Se $u>0$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iux}}{x^2+x+1}dx &= \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iuz}}{z^2+z+1}, z=z_+\right) \\
&= \lim_{z\to z_+}\frac{(z-z_+)e^{iuz}}{z^2+z+1} \\
&= \lim_{z\to z_+}\frac{e^{iuz}+(z-z_+)e^{iuz}}{2z+1} \\
&= \frac{e^{iuz_+}}{2z_++1} \\
&= \frac{e^{iu\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1} \\
&= \frac{e^{-\frac{iu}{2}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}u}}{i\sqrt{3}},
\end{aligned}
$$

cioè,

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iux}}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{iu}{2}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}u}.
$$

Per $u<0$ possiamo calcolare l'integrale usando z_-:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iux}}{x^2+x+1}dx &= -\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iuz}}{z^2+z+1}, z=z_-\right) \\
&= -\frac{e^{iuz_-}}{2z_-+1} \\
&= -\frac{e^{iu\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1} \\
&= \frac{e^{-\frac{iu}{2}}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}u}}{i\sqrt{3}},
\end{aligned}
$$

cioè, nel caso generale,

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iux}}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{iu}{2}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|u|}.
$$

4.2.3 Esercizi

1. Calcolare, con $u\in\mathbb{R}$:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iux}}{x^2+2x+2}dx.
$$

2. Utilizzando il fatto che $\cos(ux) = \mathrm{Re}(e^{iux})$ è la parte reale di e^{iux}, calcolare, per $u \in \mathbb{R}$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos(ux)}{x^4+1} dx.$$

4.3 La gaussiana.

Si sa che vale:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

A partire da questo singolo integrale (che calcoleremo in altro momento senza residui), possiamo calcolare la trasformata di Fourier della funzione gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$, fondamentale in probabilità, in statistica e nella trasmissione del calore.

Allo scopo, nel caso $u < 0$, consideriamo un rettangolo avente vertici $R > 0$ (che tenderà a infinito), $R + ai$ ($a = -\frac{u}{2} > 0$), $-R + ai$, $-R$. Chiamiamo $\sigma = \gamma + \alpha + \delta + \beta$ il suo perimetro percorso in senso antiorario dove, come più sopra:

- $\gamma(x) = x$ per $x \in [-R, R]$;
- $\alpha(y) = R + iy$ per $y \in [0, a]$;
- $-\delta(x) = x + ia$ per $x \in [-R, R]$;
- $-\beta(y) = -R + iy$ per $y \in [0, a]$.

Poiché la funzione $f(z) = e^{-z^2}$ è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, cioè non ha singolarità, possiamo anche utilizzare direttamente il Teorema Integrale di Cauchy (che poi è come il Teorema dei Residui in assenza di singolarità):
$$\begin{aligned}
0 &= \int_\sigma e^{-z^2} dz = \int_\gamma e^{-z^2} dz - \int_{-\delta} e^{-z^2} dz + \int_\alpha e^{-z^2} dz + \int_\beta e^{-z^2} dz \\
&= \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx - \int_{-R}^{R} e^{-(x+ia)^2} dx + \int_0^a e^{-(R+iy)^2} i\,dy - \int_0^a e^{-(-R+iy)^2} i\,dy \\
&= \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx - e^{a^2} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} e^{-2iax} dx + \int_0^a e^{-(R^2-y^2)} e^{-2iRy} i\,dy - \int_0^a e^{-(R^2-y^2)} e^{2iRy} i\,dy \\
&= I_1 - I_2 + I_3 - I_4.
\end{aligned}$$

Ora, abbiamo che:
$$\begin{cases} \lim_{R\to\infty} I_1 = \pi \text{ per quanto già visto,} \\ \lim_{R\to\infty} I_2 = e^{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2iax} dx \\ \lim_{R\to\infty} I_3 = \lim_{R\to\infty} I_3 = 0, \text{lo verifichiamo sotto.} \end{cases}$$

Ne segue che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2iax} dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2}.$$

Sostituendo $u = -2a$ otteniamo
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{iux} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{u^2}{4}}.$$

Ci rimangono da verificare le affermazioni riguardo a I_3 e I_4 (che si mostrano allo stesso modo). Stimiamo:
$$\begin{aligned}
|I_3| &= \left| \int_0^a e^{-(R^2-y^2)} e^{-2iRy} i\,dy \right| \\
&\leqslant e^{a^2} \int_0^a e^{-R^2} dy \\
&= a e^{a^2} e^{-R^2} \to 0 \text{ per } R \to 0.
\end{aligned}$$

Un'altra forma molto utilizzata di questa uguaglianza si ottiene ponendo $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ e $u = \sqrt{2}s$. Sostituendo, si ha infatti:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{ist} dt = e^{-\frac{s^2}{2}},$$

che ha il vantaggio di avere la funzione $e^{-\frac{x^2}{2}}$ in entrambi i membri dell'uguaglianza.